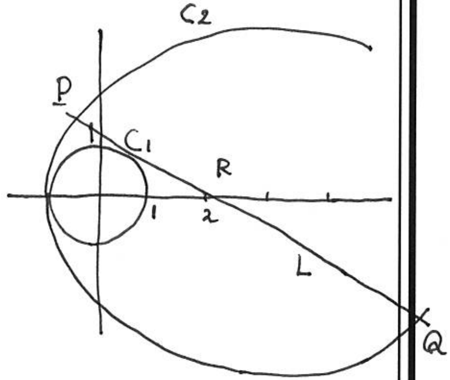
自治医科大学

2014年 第13問

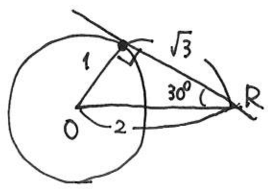
数理 石井K

$\boxed{13}$ 円 $C_1 : x^2+y^2=1$，円 $C_2 : (x-4)^2+y^2=25$ について考える．点R(2, 0)から円 C_1 にひいた接線を直線 L とする（直線 L の傾きは負の実数とする）．このとき，円 C_2 と直線 L は2つの異なる点P，Qで交わる．線分PQの長さを a としたとき，$\dfrac{a}{\sqrt{6}}$ の値を求めよ．



Lの傾きは，$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ なので

$$L : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$$



$$\therefore\ (x-4)^2 + \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)\right\}^2 = 25$$

$$\therefore\ (x-4)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^2 = 25$$

$$3(x^2-8x+16) + x^2-4x+4 = 75$$

$4x^2-28x-23=0$ この解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと．

$$P\left(\alpha, -\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha-2)\right),\ Q\left(\beta, -\frac{1}{\sqrt{3}}(\beta-2)\right)$$

$$\therefore\ PQ = a = \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha-\beta)\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}(\alpha+\beta)^2 - \frac{16}{3}\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 7^2 + \frac{16}{3}\cdot\frac{23}{4}}$$

$$= 4\sqrt{6}$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sqrt{6}} = \underline{4}$$