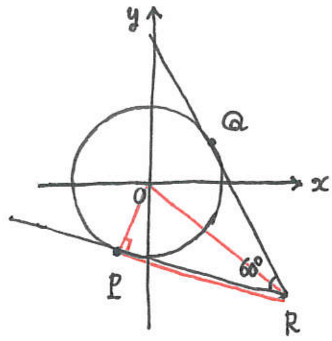
自治医科大学

2015年 医学部 第9問

数理 石井K

$\boxed{9}$ 円 $C : x^2 + y^2 = 20$ と円 C の外部に存在する点 $\mathrm{R}(8,\ a)$（a は負の実数）について考える．点 R を通り円 C に接する直線は 2 つ存在する．この 2 つの直線が円 C と接する点を P，Q とする（点 P，Q の x 座標をそれぞれ p，q とする）．$\angle\mathrm{PRQ} = 60°$ となるとき，$|a + p + q|$ の値を求めよ．



△OPR は 30°，60°，90° の直角三角形より．

$\mathrm{OP} : \mathrm{OR} = 2\sqrt{5} : \sqrt{64 + a^2} = 1 : 2$

$\therefore\ 20 : a^2 + 64 = 1 : 4$

$\therefore\ a^2 + 64 = 80$

$a < 0$ より．$a = -4$

また，$\mathrm{OP} : \mathrm{PR} = 2\sqrt{5} : \sqrt{(8-p)^2 + (a + (\sqrt{20 - p^2}))^2} = 1 : \sqrt{3}$

$\therefore\ 20 : p^2 - 16p + 64 + 16 - 8\sqrt{20 - p^2} + 20 - p^2 = 1 : 3$

$\therefore\ 60 = -16p + 80 - 8\sqrt{20 - p^2} + 20$

$\therefore\ 5 - 2p = \sqrt{20 - p^2}\quad (-2\sqrt{5} \leqq p \leqq 2\sqrt{5})$

両辺 2 乗して．$4p^2 - 20p + 25 = 20 - p^2$　$\therefore\ p = 2 \pm \sqrt{3}$

$p < q$ とすると．$p = 2 - \sqrt{3}$，$q = 2 + \sqrt{3}$

以上より．$|a + p + q| = |-4 + 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}| = \underline{0}$ //