自治医科大学

2016年 医学部 第17問

数理 石井K

$\boxed{17}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．$S_n = 5 - 2n - 2a_n$ であるとき，$\left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|$ の値を求めよ．

$n \geqq 2$ のとき.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 5-2n-2a_n-(5-2(n-1)-2a_{n-1})$$
$$= -2-2a_n+2a_{n-1}$$

$\therefore\ a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - \frac{2}{3}$

収束するということを前提にすれば，
収束値を α とおいて，
$\alpha = \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{3}$ より $\alpha = -2$

$\therefore\ a_n + 2 = \frac{2}{3}(a_{n-1}+2)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n+2\}$ は初項 a_1+2，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列

ここで，$a_1 = S_1 = 5-2-2a_1$ より，$a_1 = 1$ なので

$$a_n + 2 = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2$$

$$\therefore\ \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\left\{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2\right\}\right|$$

$$= \underline{2}$$ //