金沢大学

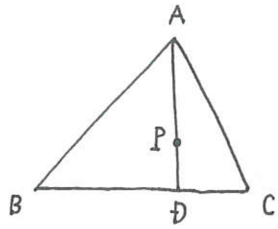
2015年 文系 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 平面上の三角形ABCで，$|\overrightarrow{AB}|=7$，$|\overrightarrow{BC}|=5$，$|\overrightarrow{AC}|=6$となるものを考える．また，三角形ABCの内部の点Pは，

$$\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}\quad (s>0)\quad \cdots(*)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ とするとき，αとβをsを用いて表せ．

(2) 2直線AP，BCの交点をDとするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|}$ と $\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|}$ をsを用いて表せ．

(3) 三角形ABCの面積を求めよ．

(4) 三角形APCの面積が$2\sqrt{6}$となるようなsの値を求めよ．

(1) 与えられた式(*)より，

$$-\overrightarrow{AP}+s(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$\therefore (s+4)\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{s}{s+4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{s+4}\overrightarrow{AC}$$ （∵ $s>0$より $s+4>0$ なので両辺を $s+4\,(\neq 0)$ で割った）

$$\therefore \underline{\alpha=\frac{s}{s+4},\ \beta=\frac{3}{s+4}}\,//$$

(2) 3点A，P，Dは一直線上にあるから，

$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}$ （kは実数）と表せる．

$\therefore$ (1)より，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{s}{s+4}\cdot k\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{s+4}\cdot k\cdot\overrightarrow{AC}\quad\cdots(**)$

点Dは直線BC上の点より，$\dfrac{s}{s+4}k+\dfrac{3}{s+4}k=1$

$$\therefore k=\frac{s+4}{s+3}$$

(**)に代入して，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{s}{s+3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{s+3}\overrightarrow{AC}$

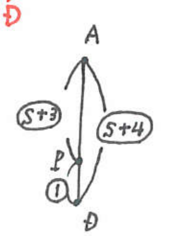
$\therefore |\overrightarrow{BD}|:|\overrightarrow{DC}|=\dfrac{3}{s+3}:\dfrac{s}{s+3}=3:s$　　$\therefore \underline{\dfrac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{3}{s}}\,//$

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{s+4}{s+3}\overrightarrow{AP}$ より，$|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AP}|=s+4:s+3$

$$\therefore \underline{\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|}=s+3}\,//$$

$\overrightarrow{AP}$からすぐに$\overrightarrow{AD}$が求まる人はここは省略してよい．むしろ，その方が良い

$$\overrightarrow{AP}=\frac{s}{s+4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{s+4}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{s+3}{s+4}\underbrace{\left(\frac{s}{s+3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{s+3}\overrightarrow{AC}\right)}_{=\overrightarrow{AD}}$$



0001978181208999

金沢大学

2015年 文系 第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

1 平面上の三角形ABCで，$|\overrightarrow{AB}|=7$，$|\overrightarrow{BC}|=5$，$|\overrightarrow{AC}|=6$となるものを考える．また，三角形ABCの内部の点Pは，

$$\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}\quad (s>0)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$とするとき，$\alpha$と$\beta$を$s$を用いて表せ．

(2) 2直線AP，BCの交点をDとするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|}$と$\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|}$を$s$を用いて表せ．

(3) 三角形ABCの面積を求めよ．

(4) 三角形APCの面積が$2\sqrt{6}$となるようなsの値を求めよ．

(3) $\angle BAC=\theta$とおくと，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 6}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore \sin^2\theta=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{24}{49}\qquad \therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$=\underline{6\sqrt{6}}\ /\!/$$

(4) $$\triangle APC=\frac{AP}{AD}\cdot\triangle ADC$$

$$=\frac{AP}{AD}\cdot\frac{DC}{BC}\cdot\triangle ABC$$

$$=\frac{s+3}{s+4}\cdot\frac{s}{s+3}\cdot 6\sqrt{6}\qquad (\because (2)と(3)より)$$

$$=\frac{s}{s+4}\cdot 6\sqrt{6}$$

$$\therefore \frac{s}{s+4}\cdot 6\sqrt{6}=2\sqrt{6}$$

$$\therefore \frac{s}{s+4}=\frac{1}{3}$$

$$3s=s+4$$

$$\therefore \underline{s=2}\ /\!/$$