県立広島大学

2013年 第2問

訂正版

数理 石井K

解答内の一部計算ミスを訂正しました。

$\boxed{2}$ 自然数を1から順に並べ，第n群が3^{n-1}個の自然数を含むように分割する．例えば，第1群は$\{1\}$であり，第2群は$\{2,\ 3,\ 4\}$である．次の問いに答えよ．

$\{1\}$，　$\{2,\ 3,\ 4\}$，　$\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}$，　…

(1) 第n群の最初の数を求めよ．

(2) 第n群に含まれるすべての自然数の和を求めよ．

(3) 6^{20}は第何番目の群に含まれるか．ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$とする．

(1) 第1群から第$n-1$群$(n \geqq 2)$までに含まれる項の数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} = \frac{1-3^{n-1}}{1-3} = \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

∴ 第n群の最初の数は，$\dfrac{3^{n-1}-1}{2}+1$番目の項であるから，$\dfrac{3^{n-1}-1}{2}+1 = \underline{\dfrac{3^{n-1}+1}{2}}$ //

(2) 求める和をS_nとおくと(1)より，

$$S_n = \left(\frac{3^{n-1}-1}{2}+1\right)+\left(\frac{3^{n-1}-1}{2}+2\right)+\cdots+\left(\frac{3^{n-1}-1}{2}+3^{n-1}\right)$$ ← 3^{n-1}項の和

$$= \frac{3^{n-1}-1}{2}\cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}\cdot(1+3^{n-1})$$

$$= \underline{3^{2n-2}}$$ //

(3) 6^{20}が第n群に含まれる $\iff \underbrace{\dfrac{3^{n-1}+1}{2}}_{\text{第}n\text{群の最初の数}} \leqq 6^{20} < \underbrace{\dfrac{3^n+1}{2}}_{\text{第}n+1\text{群の最初の数}}$

6^{20}は整数であるから，$\iff \dfrac{3^{n-1}}{2} < 6^{20} < \dfrac{3^n}{2}$

$$\iff (n-1)\log_{10}3 - \log_{10}2 < 20\log_{10}6 < n\log_{10}3 - \log_{10}2$$

$$\iff \frac{20(\log_{10}2+\log_{10}3)+\log_{10}2}{\log_{10}3} < n < \frac{20(\log_{10}2+\log_{10}3)+\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3}$$

$$\iff 20+\frac{21\times 0.3010}{0.4771} < n < 21+\frac{21\times 0.3010}{0.4771}$$

$$\iff 33.24 < n < 34.25$$

∴ $n = 34$　　<u>第34群</u> //