



2012年理系第3問

3 数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する.

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3} \left(c_n + \frac{1}{4^{n+1}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問に答えよ.

- (1) $n \geq 2$ のとき, $a_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$ とする. このとき, $c_n = \frac{1}{3^{n-1}} + \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{3^{n-i}}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) が成り立つことを示せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ.