

2014年理学部第2問


 数理
石井K

2 関数 $f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - ax)^2 dx$ の最小値と、そのときの a の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx - 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (-\cos x)' \, dx + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx - 2a \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \, dx + a^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2a \left[-\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi^3}{24} a^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} - 2a + \frac{\pi^3}{24} a^2 \\
 &= \frac{\pi^3}{24} \left(a^2 - \frac{48}{\pi^3} a \right) + \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi^3}{24} \left(a - \frac{24}{\pi^3} \right)^2 - \frac{24}{\pi^3} + \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

\therefore 最小値は $\frac{\pi}{4} - \frac{24}{\pi^3}$ ($a = \frac{24}{\pi^3}$ のとき)

 //