



2011年第2問

2 各辺の長さが0でない三角形ABCに対し,

$$P(A) = \vec{AB} \cdot \vec{AC}, \quad P(B) = \vec{BC} \cdot \vec{BA}, \quad P(C) = \vec{CA} \cdot \vec{CB}$$

とおく. このとき以下の問いに, それぞれ理由をつけて答えなさい.

(1)  $P(B) = P(C)$  をみたすとき, この三角形はどのような三角形か.

(2)  $P(A)P(B) = P(C)P(A)$  をみたすとき, この三角形はどのような三角形か.

$$(1) P(B) = P(C) \Leftrightarrow \vec{BC} \cdot \vec{BA} - \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (-\vec{AB}) - (-\vec{AC}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AB}|^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC} - |\vec{AC}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{AB}| = |\vec{AC}|$$

$\therefore AB = AC$  となる二等辺三角形

$$(2) P(A)P(B) = P(C)P(A) \Leftrightarrow P(A) \{P(B) - P(C)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ または } P(B) = P(C)$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ または } |\vec{AB}| = |\vec{AC}| \quad \leftarrow (1) \text{より}$$

$$\Leftrightarrow \angle A = 90^\circ \text{ または } |\vec{AB}| = |\vec{AC}|$$

$\therefore \angle A = 90^\circ$  の直角三角形 または  $AB = AC$  である二等辺三角形