東北学院大学

2016年 工学部 第2問

数理 石井K

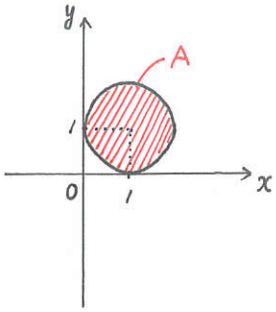
2 不等式

$x^2+y^2-2x-2y+1 \leqq 0$

の表す領域を A とし，不等式

$\log_{10}(y-1)-2\log_{10}|x-1| \geqq 0$

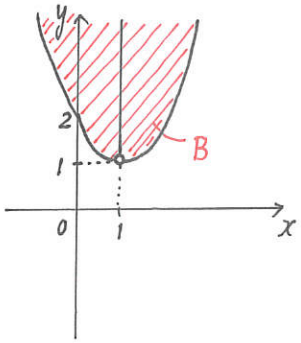
で表される領域を B とする．このとき，以下の問いに答えよ．



(1) A を図示せよ．
(2) B を図示せよ．
(3) 点 $(x,\ y)$ が A と B の共通部分 $A\cap B$ を動くとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ．

(1) $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 1$

よって，右上図の斜線部分（ただし境界線を含む）



(2) 真数条件より，$y>1$ かつ $x\neq 1$

$\log_{10}(y-1)-\log_{10}|x-1|^2 \geqq 0$

$\therefore\ y-1 \geqq (x-1)^2$

$\therefore\ y \geqq (x-1)^2+1 \quad (x\neq 1)$

よって，右図の斜線部分（ただし境界線は含み，直線 $x=1$ 上の点は除く）

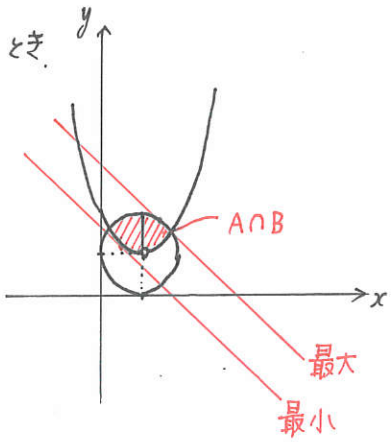
(3) $x+y=k$ とおくと．

円と $x+y=k$ が接するのは，$\dfrac{|1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1 \iff k=2\pm\sqrt{2}$ のとき．

このうち，右図の最大となるのは，$k=2+\sqrt{2}$

放物線と $x+y=k$ が接するのは，

$(x-1)^2+1-(-x+k)=0$ が重解をもつとき．なので

$x^2-x+2-k=0 \qquad \therefore\ k=\dfrac{7}{4}$

$\therefore$ 最大値 $2+\sqrt{2}$，最小値 $\dfrac{7}{4}$ //