立教大学

2016年 全学部日程 第2問

$\boxed{2}$ a を正の実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定義する．

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 をそれぞれ分子と分母が a の整式となっている分数式で表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$ により定めるとき，b_1，b_2，b_3，b_4 をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) b_{n+1} と b_n を用いて b_{n+2} を表せ．

(4) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_{n+1} - b_n$ により定めるとき，n と a を用いて c_n を表せ．

(5) $a = 1$ のとき，b_n を n を用いて表せ．また，a_n を n を用いて表せ．

(1) $a_2 = 1 + \frac{2}{a} = \frac{a+2}{a}$，$a_3 = 1 + 2\cdot\frac{a}{a+2} = \frac{3a+2}{a+2}$，$a_4 = 1 + 2\cdot\frac{a+2}{3a+2} = \frac{5a+6}{3a+2}$

$\therefore$ $\underline{a_2 = \frac{a+2}{a},\ a_3 = \frac{3a+2}{a+2},\ a_4 = \frac{5a+6}{3a+2}}$ //

(2) $b_1 = -a_1 = -a$，$b_2 = a_1a_2 = a+2$，$b_3 = -a_1a_2a_3 = -3a-2$，$b_4 = a_1a_2a_3a_4 = 5a+6$

$\therefore$ $\underline{b_1 = -a,\ b_2 = a+2,\ b_3 = -3a-2,\ b_4 = 5a+6}$ //

(3) $b_{n+2} = (-1)^{n+2} a_1a_2\cdots a_n a_{n+1} a_{n+2}$

$= (-1)^{n+2} a_1a_2\cdots a_n a_{n+1}\left(1 + \frac{2}{a_{n+1}}\right)$

$= -(-1)^{n+1} a_1a_2\cdots a_n a_{n+1} + 2\cdot(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$

$= \underline{-b_{n+1} + 2b_n}$ //

(4) (3)より，$b_{n+2} - b_{n+1} = -2(b_{n+1} - b_n)$

$\therefore$ $c_{n+1} = -2c_n$

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ は初項 $b_2 - b_1 = 2a+2$，公比 -2 の等比数列

$\therefore$ $c_n = (2a+2)\cdot(-2)^{n-1}$　　$\therefore$ $\underline{c_n = -(a+1)\cdot(-2)^n}$ //

(5) $a = 1$ のとき，$c_n = (-2)^{n+1}$

$\therefore$ $n \geqq 2$ のとき，$b_n = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k+1} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}(-2)^{n-1} = \underline{\frac{1}{3}\left\{1-(-2)^{n+1}\right\}}$ //　これは $n=1$ のときも成り立っている．

$n \geqq 2$ のとき．$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(-1)^n a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}} = -a_n$ より　$a_n = -\frac{\frac{1}{3}\left\{1-(-2)^{n+1}\right\}}{\frac{1}{3}\left\{1-(-2)^n\right\}}$

$\therefore$ $\underline{a_n = -\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)^n}}$ //　これは $n=1$ のときも成り立っている．