星薬科大学

2013年 薬学部 第4問

4 次の問に答えよ．

(1) 不等式 $16\cdot 8^{-x}-48\cdot 4^{-x}+32\cdot 2^{-x}<0$ を満たす x の値の範囲は $-\boxed{}<x<\boxed{}$ である．

1　0

(2) $\log_a b+\log_b c+\log_c a=\log_a b\cdot\log_b c+\log_b c\cdot\log_c a+\log_c a\cdot\log_a b=3$ が成り立つとき，$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\boxed{}$ である．

8

(3) $\log_4(x^4+2)-2\log_4 2x$ の最小値は $-\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

1　4

(1) $t=2^{-x}$ とおくと．不等式は

$$16t^3-48t^2+32t<0 \iff 16t(t^2-3t+2)<0$$
$$\iff 16t(t-1)(t-2)<0$$

ここで $t=2^{-x}>0$ より．$1<t<2$

$\therefore\ 1<2^{-x}<2$　$\therefore\ \underline{-1<x<0}$ //

(2) $\alpha=\log_a b$，$\beta=\log_b c$，$\gamma=\log_c a$ とおくと．

$\alpha+\beta+\gamma=3$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

また，$\alpha\beta\gamma=\log_a b\cdot\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\dfrac{\log_a a}{\log_a c}=1$ より．解と係数の関係により，

α,β,γ は方程式 $x^3-3x^2+3x-1=0$ の解である

すなわち．$(x-1)^3=0$ の解が α,β,γ なので，$\alpha=\beta=\gamma=1$

$\therefore\ a=b=c$ であるから．(与式) $=\dfrac{2a\cdot 2a\cdot 2a}{a^3}=\underline{8}$ //

(3) 真数条件より．$x>0$

(与式) $=\log_4\dfrac{x^4+2}{4x^2}$

$=\log_4\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{2x^2}\right)$

相加・相乗平均の関係より．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{2x^2}\geqq 2\sqrt{\dfrac{x^2}{4}\cdot\dfrac{1}{2x^2}}$

$\dfrac{x^2}{4}>0$，$\dfrac{1}{2x^2}>0$ より．　$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

等号成立は $\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{1}{2x^2}$　∴①より $x=\sqrt[4]{2}$

$y=\log_4 x$ のグラフは単調増加より

(与式) $\geqq\log_4\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\log_4 4^{-\frac{1}{4}}=-\dfrac{1}{4}$

∴最小値は $\underline{-\dfrac{1}{4}}$ //