0001744635528999

星薬科大学

2010年 薬学部 第6問

数理 石井K

6 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$\{a_n\}:\ \frac{4}{1\cdot 2},\ \frac{4}{2\cdot 3},\ \frac{4}{3\cdot 4},\ \frac{4}{4\cdot 5},\ \cdots$$

$$\{b_n\}:\ \frac{9}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{16}{2\cdot 3\cdot 4},\ \frac{23}{3\cdot 4\cdot 5},\ \frac{30}{4\cdot 5\cdot 6},\ \cdots$$

+7 +7 +7

として次の問いに答えよ．

(1) 各数列の一般項は $a_n=\dfrac{4}{n(n+1)}$, $b_n=\dfrac{\boxed{7}\,n+\boxed{2}}{n(n+1)(n+2)}$ である．

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$S_n=\frac{\boxed{4}\,n}{n+1},\quad T_n=\frac{\boxed{4}\,n^2+\boxed{5}\,n}{(n+1)(n+2)}$$

である．

(3) $S_n-T_n<\dfrac{1}{4}$ を満たす自然数 n の最小値は $\boxed{9}$ である．

(1) $a_n=\dfrac{4}{n\cdot(n+1)}$

$b_n=\dfrac{7n+2}{n(n+1)(n+2)}$ //

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{4}{k(k+1)}$

$=4\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

$=4\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\dfrac{4n}{n+1}$ //

(2)のつづき．

~~$b_n=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}+\dfrac{C}{n+2}$ とおくと．~~

~~$b_n=\dfrac{A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)n+2A}{n(n+1)(n+2)}$~~

~~$\therefore A=1,\ B=5,\ C=-6$~~

~~$\therefore b_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n+1}-\dfrac{6}{n+2}$~~

分解しすぎて都合が悪くなったのでヤメ．

$b_n=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$

$\therefore T_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}+6\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)+6\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}+6\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{4n^2+5n}{(n+1)(n+2)}$ //

(3) $S_n-T_n=\dfrac{4n(n+2)-4n^2-5n}{(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{3n}{(n+1)(n+2)}<\dfrac{1}{4}$

$\therefore 12n<n^2+3n+2$

$\therefore n^2-9n+2>0$

$n\geqq 1$ より， $n>\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}$

$\dfrac{17}{2}=\dfrac{9+\sqrt{64}}{2}<\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}<\dfrac{9+\sqrt{81}}{2}=9$ より， $n=9$ //