星薬科大学

2013年 薬学部 第3問

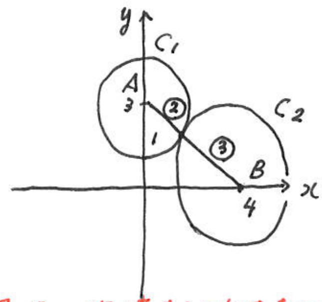
数理 石井K

3 xy 平面上に2つの円 $C_1 : x^2+(y-3)^2=4$, $C_2 : (x-4)^2+y^2=9$ がある．次の問に答えよ．

(1) C_1 と C_2 の接点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{}\,8}{\boxed{}\,5}, \dfrac{\boxed{}\,9}{\boxed{}\,5}\right)$ である．

(2) 原点を中心とし，C_1 と C_2 の両方に接する円を C_3 とすると，C_3 の半径は $\boxed{}$ 1 である．

(3) C_1, C_2, C_3 が接する3つの接点を通り，軸が y 軸と平行な放物線の頂点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{}\,7}{\boxed{}\boxed{}\,1\ 0}, -\dfrac{\boxed{}\,9}{\boxed{}\boxed{}\,4\ 0}\right)$ である．



(1) 点 $(0, 3)$, $(4, 0)$ をそれぞれ A, B とおくと．

接点は線分 AB を $2:3$ に内分する点なので，

$$\left(\frac{2\cdot 4}{2+3}, \frac{3\cdot 3}{2+3}\right) = \underline{\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)}_{//}$$

注：同時に内接することはないので，外接する場合を考える

(2) C_1 と C_3 が接するのは，$2+r=3$ ∴ C_3 の半径 r が $r=1$ のときであり，

このとき，$3+r=4$ をみたすので C_2 とも接している ∴ $r=\underline{1}_{//}$

(3) 3つの接点は $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ なので

放物線は $y=ax^2+bx+1$ $(a \neq 0)$ とおける．

$(1, 0)$ を通るので，$a+b=-1$ …①

$\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ 〃 $\frac{64}{25}a+\frac{8}{5}b=\frac{4}{5}$ …②

① − ② × $\frac{5}{8}$ より，$-\frac{3}{5}a=-\frac{3}{2}$ ∴ $a=\frac{5}{2}$ ① より，$b=-\frac{7}{2}$

$$\therefore y=\frac{5}{2}x^2-\frac{7}{2}x+1$$
$$=\frac{5}{2}\left(x^2-\frac{7}{5}x\right)+1$$
$$=\frac{5}{2}\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{5}{2}\cdot\frac{49}{100}+1$$
$$=\frac{5}{2}\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{9}{40}$$

∴ 頂点は $\underline{\left(\frac{7}{10}, -\frac{9}{40}\right)}_{//}$