

2015年医学部第15問



15 $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{5}$ であるとする. $|\vec{a} + t\vec{b}|$ は (t は実数), $t = c$ のとき, 最小値 m をとる. $\frac{mc}{3}$ の値を求めよ.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 25 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4$$

$$= 29 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{5} \text{ より } 29 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 45$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$$

$$= 25 + 2t \cdot (-8) + 4t^2 \quad (\because \textcircled{1} \text{ より})$$

$$= 4t^2 - 16t + 25$$

$$= 4(t-2)^2 + 9$$

$\therefore |\vec{a} + t\vec{b}|$ は $t = 2$ のとき 最小値 3 をとる

$$\therefore c = 2, m = 3$$

$$\therefore \frac{mc}{3} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$$