

2015年工学部第3問

3 n を2以上の自然数とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = x^n \log x$ ($x > 0$) とする。ただし、対数は自然対数とする。次に答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $\log x + \frac{1}{x} > 0$ を証明せよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \log x = 0$ を示せ。
- (3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、その最小値を求めよ。また、曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。ただし、曲線の凹凸は調べなくてよい。
- (4) $f(x)$ が最小値をとるときの x の値を c_n とし

$$I_n = \int_{c_n}^1 f(x) dx$$

とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 I_n$ を求めよ。