

2015年 第2問

 数理  
石井K

 2  $xy$  平面において、ベクトル  $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ,  $\vec{b} = (x, y)$  に対して、

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \geq 1 \quad \text{かつ} \quad |\vec{b}| \leq 1$$

を満たす点  $(x, y)$  の領域を  $D$  とする。ただし、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$  は  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積、 $|\vec{b}|$  はベクトル  $\vec{b}$  の長さを表す。以下の間に答えよ。

- (1)  $D$  を図示せよ。  
 (2)  $D$  の面積を求めよ。

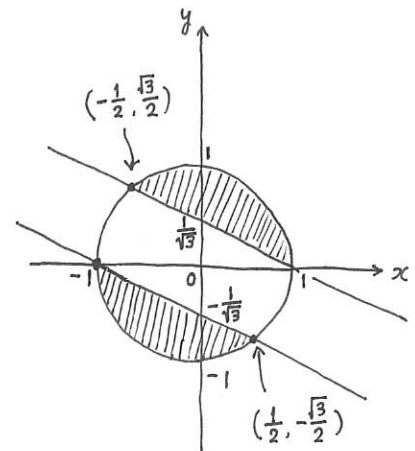
$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = x + \sqrt{3}y$$

$$\text{よって、} |\vec{a} \cdot \vec{b}| \geq 1 \text{ より、} |x + \sqrt{3}y| \geq 1$$

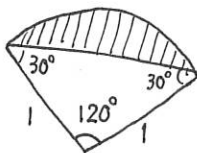
$$\text{すなわち、} x + \sqrt{3}y \leq -1 \text{ または、} x + \sqrt{3}y \geq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \text{ より } x^2 + y^2 \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① かつ ② の条件を満たす  $(x, y)$  を図示すると、右のようになる。ただし境界線も含む



(2)



$D$  の面積を  $S$  とおくと、

$$S = 2 \times (\text{扇形} - \text{三角形})$$

$$= 2 \cdot \left\{ \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ \right\}$$

$$= 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$= \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$$

〃