広島市立大学

2012 年 第 3 問

3 空間内に 4 点 O，A，B，C があり，次の条件を満たすものとする．

$$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=1,\ \mathrm{OC}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{3},\ \angle\mathrm{COA}=\frac{\pi}{4}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，P は平面 OAB 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と表されているとする．点 P が $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ を満たして動くとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 C から平面 OAB に下ろした垂線と平面 OAB の交点を Q とする．したがって，$\mathrm{CQ}\perp\mathrm{OA}$，$\mathrm{CQ}\perp\mathrm{OB}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\vec{a}+v\vec{b}$ と表したとき，u，v を求めよ．

(2) (i) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値と最小値を求めよ．また，最大値をとるときの x，y の値，最小値をとるときの x，y の値をそれぞれ求めよ．

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角 θ がとりうる値の範囲を求めよ．ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする．

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が最大値，最小値をとるときの点 P をそれぞれ P_1，P_2 とおく．点 P_1，P_2 はいずれも直線 OQ 上にあることを示せ．ただし，Q は (1) で定めた点とする．