0000136273689999

弘前大学

2010年第2問

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 4,\quad a_{n+1} = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1} < 1 \quad \cdots ①$

$b_n(a_n + 1) = a_n - 3 \iff a_n(b_n - 1) = -b_n - 3$

$\iff a_n = \dfrac{b_n + 3}{1 - b_n}$ （∵①より） $\cdots ②$

これを漸化式に代入して， $\dfrac{b_{n+1} + 3}{1 - b_{n+1}} = \dfrac{4 \cdot \frac{b_n + 3}{1 - b_n} + 3}{\frac{b_n + 3}{1 - b_n} + 2} \iff \dfrac{b_{n+1} + 3}{1 - b_{n+1}} = \dfrac{b_n + 15}{5 - b_n}$

$\iff (b_{n+1} + 3)(5 - b_n) = (1 - b_{n+1})(b_n + 15)$

$\iff \underline{b_{n+1} = \dfrac{1}{5} b_n}$ //

(2) (1)より 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1 - 3}{a_1 + 1} = \dfrac{1}{5}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列

$\therefore b_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

②に代入して， $a_n = \dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^n + 3}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

$\therefore \underline{a_n = \dfrac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}}$ //