2010年医学部第24問

$\boxed{24}$ 関数 $f(x)=x^3-px^2+(p^2-2p)x+q$（$p>0$，$q>0$，$p$ および q は整数とする）について考える．$f(x)=0$ が1つの負の実数解と相異なる2つの正の実数解をもつとき，pq の値を求めよ．

$f'(x)=3x^2-2px+p^2-2p$

$f(x)=0$ が3つの異なる実数解をもつことから，$f(x)$ は極大値と極小値をもつ

すなわち，$f'(x)=0$ は異なる2つの実数解をもつ

判別式を D とおくと，

$D/4=p^2-3(p^2-2p)$

$\quad=-2p(p-3)$

$\therefore\ -2p(p-3)>0$ より $0<p<3$

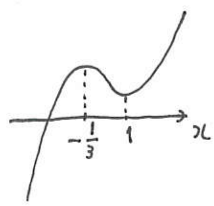
p は整数であるから，$p=1$ または $p=2$

(i) $p=1$ のとき，

$f'(x)=(3x+1)(x-1)$

$\therefore$ 増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$q+\frac{5}{27}$	$\searrow$	$q-1$	$\nearrow$



$\therefore\ f(-\frac{1}{3})=q+\frac{5}{27}>0$

$f(1)=q-1\geqq 0$（$\because\ q>0$ で q は整数なので，$q\geqq 1$ より）

$\therefore$ グラフは右のようになり，異なる解の個数は1または2となり不適．

(ii) $p=2$ のとき，

$f(x)=x^3-2x^2+q$，$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	q	$\searrow$	$q-\frac{32}{27}$	$\nearrow$

$\therefore\ f(0)=q>0$ より

$f(\frac{4}{3})=q-\frac{32}{27}<0$ となればよい

$\therefore\ q>0$，q：整数 より，$q=1$

(i)，(ii)より，$p=2$，$q=1$

逆にこのとき，$f(x)=x^3-2x^2+1=(x-1)(x^2-x-1)$ となり $f(x)=0$ の解は $x=1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ 条件をみたしている　$\therefore\ \underline{pq=2}$ //