2016年 理工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)=e^{-x}\sin x$, $g(x)=e^{-x}\cos x$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) すべての x について，$f'(x)=af(x+b)$ が成り立つような定数 a, b を求めよ．ただし，$0\leqq b\leqq \pi$ とする．

(3) $\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq \dfrac{5\pi}{4}$ において，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)
$$f'(x)=(e^{-x})'\sin x+e^{-x}(\sin x)'$$
$$=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$$
$$=\underline{e^{-x}(\cos x-\sin x)}$$ //

(2)
$$af(x+b)=a\cdot e^{-x-b}\sin(x+b)$$
$$=ae^{-x}\cdot e^{-b}(\sin x\cos b+\cos x\sin b)$$

(1)の結果と比較して，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}ae^{-b}=1 \text{ かつ } b=\frac{3}{4}\pi \iff \underline{a=\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi},\ b=\frac{3}{4}\pi}$$ //

(3)
$$f(x)-g(x)=e^{-x}(\sin x-\cos x)$$
$$=\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$$

$\therefore$ $\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5\pi}{4}$ において，$f(x)\geqq g(x)$

$$\therefore S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}e^{-x}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(-e^{-x})'(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\underbrace{\Big[-e^{-x}(\sin x-\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}}_{=0}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}e^{-x}(\cos x+\sin x)\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(-e^{-x})'(\cos x+\sin x)\,dx$$
$$=\Big[-e^{-x}(\cos x+\sin x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}e^{-x}(\cos x-\sin x)\,dx}_{=-S}$$
$$=\sqrt{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}+\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}-S$$

$$\therefore 2S=\sqrt{2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{5}{4}\pi}\right) \qquad \therefore \underline{S=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{5}{4}\pi}\right)}$$ //