筑波大学

2017年 第6問

$\boxed{6}$ $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする．複素数平面上において，原点を中心とする半径1の円の上に異なる5点 $\mathrm{P}_1(w_1)$，$\mathrm{P}_2(w_2)$，$\mathrm{P}_3(w_3)$，$\mathrm{P}_4(w_4)$，$\mathrm{P}_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の2つの条件（ i ），（ ii ）を満たすとする．

（ i ）$(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$ が成り立つ．

（ ii ）$\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ の解である．

また，五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の面積を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) 五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle \mathrm{P}_5\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を求めよ．

(2) S を a を用いて表せ．

(3) $R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$ とする．このとき，$R^2 + 2S$ は a の値によらないことを示せ．