奈良教育大学

2012年第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $a>0$ とする．次の関数 $f(x)$ について，$0 \leqq x \leqq 1$ における最大値および最小値を求めよ．

$f(x)=x^3-a^2x$

$$f'(x)=3x^2-a^2$$
$$=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$$

(i) $\frac{\sqrt{3}}{3}a \leqq 1$ すなわち $0<a\leqq\sqrt{3}$ のとき

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}a$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$	$\nearrow$	$1-a^2$

増減表より．
$$\begin{cases} \text{最小値は } -\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3 \ \left(x=\frac{\sqrt{3}}{3}a\text{ のとき}\right) \\ \text{最大値は．} \begin{cases} 0 & (1\leqq a\leqq\sqrt{3})\ (x=0\text{ のとき}) \\ 1-a^2 & (0<a<1)\ (x=1\text{ のとき}) \end{cases} \end{cases}$$

(ii) $a>\sqrt{3}$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において．$f'(x)<0$ $\therefore$ $f(x)$ は単調に減少する

$\therefore$ 最大値は $f(0)=0$，最小値は $f(1)=1-a^2$

(i) (ii) より．

$$\begin{cases} 0<a<1 \text{ のとき 最大値は } f(1)=1-a^2\text{，最小値は } f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3 \\ 1\leqq a\leqq\sqrt{3} \text{ のとき．最大値は } f(0)=0\text{，最小値は } f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3 \\ a>\sqrt{3} \text{ のとき．最大値は } f(0)=0\text{，最小値は } f(1)=1-a^2 \end{cases}$$

//