0001843636518999

高知大学

2014年 第3問

3 丸いピザを包丁で，まっすぐに切る．1回切るとどんな切り方をしてもピザは2片に分割される．2回だと3片か4片に分割される．このとき，n回切ったときの最大分割数をa_nとおく．例えば$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=7$である．次の問いに答えよ．

(1) $a_3 \geqq 7$，$a_4 \geqq 11$，$a_5 \geqq 16$であることを図により確かめよ．

(2) n回目に新しく切ったとき，その切り口はいくつかの線分に分かれる．その線分の数をp_nとおく．上手に切れば

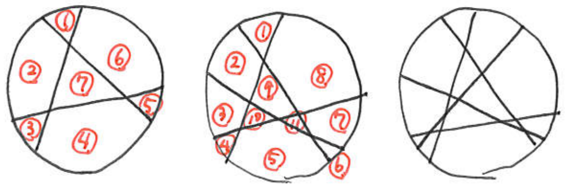
$$a_{n+1}=a_n+p_{n+1}$$

となる．このときのp_{n+1}を求めよ．

(3) a_nを求めよ．

(4) 100片以上に分割するには最低何回切ればよいか．

(1)



(2). n回切ったとき線分はn本できているから．そのすべてに交わるように$n+1$本目をひけば，$n+1$の線分に分かれる

$\therefore\ p_{n+1}=n+1$ //

(3) (2)より．$a_{n+1}=a_n+n+1$

$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} k+1 \quad (n \geqq 2)$

$\therefore\ a_n=2+\frac{1}{2}(n-1)\cdot n+(n-1)$

$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$ //　これは$n=1$のときも成り立っている．

(4) $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1 \geqq 100$

$\therefore\ n^2+n-198 \geqq 0$

$\therefore\ n(n+1) \geqq 198$

$\therefore$ (左辺)は$n=13$のとき182，$n=14$のとき210より

14回切ればよい //