山形大学

2013年 人文学部 第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 公差が0でない等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とする．また，${a_5}^2+{a_6}^2={a_7}^2+{a_8}^2$，$S_{13}=13$ が成り立つとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $a_5+a_8=a_6+a_7$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) S_n を求めよ．

(4) m を自然数とする．$\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ の値が数列 $\{a_n\}$ の項として現れるすべての m を求めよ．

(1) 公差を $d\ (\neq 0)$ とおくと，

$a_6=a_5+d,\ a_7=a_5+2d,\ a_8=a_5+3d$ …①

$\therefore (a_5+a_8)-(a_6+a_7)=a_5+a_5+3d-(a_5+d+a_5+2d)$
$=0$

すなわち，$a_5+a_8=a_6+a_7$ が成り立つ ▨

(2) (1)より，

$a_5-a_6=a_7-a_8$

両辺を2乗して，${a_5}^2-2a_5a_6+{a_6}^2={a_7}^2-2a_7a_8+{a_8}^2$

ここで，${a_5}^2+{a_6}^2={a_7}^2+{a_8}^2$ であるから，

$a_5a_6=a_7a_8$ …②

②に①を代入して，

$a_5(a_5+d)=(a_5+2d)(a_5+3d)$

$\therefore d(4a_5+6d)=0$

$d\neq 0$ より，$a_5=-\dfrac{3}{2}d$

$\therefore a_1+4d=-\dfrac{3}{2}d$

$\therefore a_1=-\dfrac{11}{2}d$ …③

また，$S_{13}=\dfrac{1}{2}\cdot 13\,(a_1+a_1+12d)=13a_1+78d$

$\therefore 13a_1+78d=13$　　$\therefore a_1=-6d+1$ …④

③，④より，$d=2$，$a_1=-11$

$\therefore a_n=-11+2(n-1)$　　$\therefore \underline{a_n=2n-13}$ //

山形大学

2013年 人文学部 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 公差が0でない等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とする．また，$a_5{}^2+a_6{}^2=a_7{}^2+a_8{}^2$，$S_{13}=13$ が成り立つとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $a_5+a_8=a_6+a_7$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) S_n を求めよ．

(4) m を自然数とする．$\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ の値が数列 $\{a_n\}$ の項として現れるすべての m を求めよ．

(3) $S_n=\frac{1}{2}n(-11+2n-13)$

$=\underline{n^2-12n}$ //

(4) $\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}=\dfrac{(a_{m+2}-4)(a_{m+2}-2)}{a_{m+2}}$　← $\{a_n\}$ の公差は2なので，$a_m=a_{m+2}-4$，$a_{m+1}=a_{m+2}-2$

$=\dfrac{a_{m+2}{}^2-6a_{m+2}+8}{a_{m+2}}$

$=a_{m+2}-6+\dfrac{8}{a_{m+2}}$

これが $\{a_n\}$ の項として現れるとして，それを a_N とすると，

$a_{m+2}-6+\dfrac{8}{a_{m+2}}=a_N$

$\therefore\ \dfrac{8}{a_{m+2}}=a_N-a_{m+2}+6$　…⑤

$\{a_n\}$ の各項は(2)の結果より，奇数　∴⑤の右辺は偶数

∴ $a_{m+2}=-1$ または 1 であることが必要．

(i) $a_{m+2}=-1$ のとき．

$2(m+2)-13=-1$　∴ $m=4$　∴ $\dfrac{a_4\cdot a_5}{a_6}=\dfrac{-5\cdot(-3)}{-1}=-15$

$a_N\geqq a_1=-11$ より，$a_N=-15$ となる自然数Nは存在せず不適．

(ii) $a_{m+2}=1$ のとき．

$m=5$ で $\dfrac{a_5\cdot a_6}{a_7}=\dfrac{-3\cdot(-1)}{1}=3$　∴ $a_N=3$ より．$N=8$　∴成り立つ

(i),(ii)より，$\underline{m=5}$ //