

2018年工学部第4問

4 座標空間内の3点

$$O(0, 0, 0), \quad A(3, 0, 4), \quad B(1, -2, 2)$$

を通る平面を  $\alpha$  とする.  $\alpha$  上にない2点 C, D は次を満たす.

- (i) 点 C, D は平面  $\alpha$  に関して同じ側にある.
- (ii) 点 C から  $\alpha$  に垂線 CE を下ろすと, 半直線 OE は角 AOB の二等分線であり, 辺 AB と点 G で交わる. 点 G は OE を 3:1 に内分する.
- (iii) 点 D から  $\alpha$  に垂線 DF を下ろすと, 半直線 AF は辺 OB と点 H で交わる. 点 H は辺 OB を 1:2 に内分する.
- (iv)  $CE = 2DF$

定数  $k$  を  $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AH}$  となるようにとる.  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおくととき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $\overrightarrow{OG}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表し, 点 G の座標を求めよ.
- (2) 平面  $\alpha$  に垂直なベクトルで, 長さが  $\sqrt{26}$  となるものを1つ求めよ.
- (3) 点 C から平面  $\alpha$  上の点を通り点 D へ行く最短経路がある. このときに通る平面  $\alpha$  上の点を P とする.  $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  および  $k$  を用いて表せ.
- (4) (3) において, 点 P が  $\triangle OAB$  の内部にあるための  $k$  の値の範囲を求めよ.