新潟大学

2014年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 自然数 n に対して，$a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，不等式

$$\left|\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx - a_n\right| \leqq \frac{1}{2n+3}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ．

(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ．

(3) より $= a_n$

(1) (左辺) $= \left|\int_0^1 \frac{-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx\right|$

$= \left|(-1)^n \cdot \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx\right|$

$= \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$

$\leqq \int_0^1 x^{2n+2}\,dx$

$0 \leqq x \leqq 1$ においては $\frac{1}{1+x^2} \leqq 1$

$= \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2n+3}$ ▨

(2) (与式) $= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx$

$= \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= [x]_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(ここで，$x = \tan\theta$ とおいて置換積分 $dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$)

$= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$

$= \underline{1 - \frac{\pi}{4}}$ //

(3) $a_n = \int_0^1 \frac{(+x^2)\{1-(-x^2)^n\}}{\underbrace{1-(-x^2)}_{\text{等比数列の和の形}}} = \int_0^1 x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \cdots + (-1)^{n+1} x^{2n}\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ ▨

(4) (1) より

$0 \leqq \left|1 - \frac{\pi}{4} - a_n\right| \leqq \underbrace{\frac{1}{2n+3}}_{n\to\infty \text{ のとき} \to 0}$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\pi}{4} - a_n\right) = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{1 - \frac{\pi}{4}}$ //