0002195364087999

埼玉大学

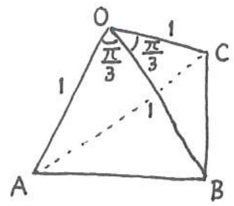
2016年 理学部 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，頂点Oから△ABCを含む平面に下ろした垂線の足をHとする．また，四面体OABCは

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \angle AOB=\angle BOC=\frac{\pi}{3}$$

を満たすものとし，$\angle AOC=\theta\ \left(0<\theta<\frac{2}{3}\pi\right)$ とする．次の問いに答えよ．



(1) 内積 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を求めよ．

(2) △ABCの面積を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ を満たす s, t, u を求めよ．

(4) $|\overrightarrow{OH}|$ を求めよ．

(5) $0<\theta<\frac{2}{3}\pi$ のとき，四面体OABCの体積の最大値を求めよ．

(1) 条件より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，同様に $\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\theta$

$$\therefore\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$$
$$=\underline{\cos\theta}\,_{//}$$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}$

$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|=1$　← △OABと△OBCは1辺の長さが1の正三角形なので

$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$0<\theta<\frac{2}{3}\pi$ より，$\sin\theta>0$ なので

$$=\underline{\frac{1}{2}\sin\theta}\,_{//}$$

(3) 点Hは平面ABC上にあるから $s+t+u=1$ …①

また OH⊥平面ABC より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2+u\vec{b}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}-u\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t+\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)u$$

$$\therefore\ -s+t+(1-2\cos\theta)u=0\ \cdots②$$

同様に $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}$ も計算して，$(\cos\theta-1)s+(1-\cos\theta)u=0$

$\therefore (\cos\theta-1)\cdot(s-u)=0$　$0<\theta<\frac{2}{3}\pi$ より $\cos\theta-1<0$　$\therefore\ s=u$ …③

2016年 理学部 第4問

2枚目／2枚

数理 石井K

4 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，頂点Oから△ABCを含む平面に下ろした垂線の足をHとする．また，四面体OABCは

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \angle AOB=\angle BOC=\frac{\pi}{3}$$

を満たすものとし，$\angle AOC=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi\right)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を求めよ．

(2) △ABCの面積を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ を満たす $s,\ t,\ u$ を求めよ．

(4) $|\overrightarrow{OH}|$ を求めよ．

(5) $0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，四面体OABCの体積の最大値を求めよ．

(3)のつづき

①−②より，$2s+2(\cos\theta)u=1\ \cdots$ ④

③，④より，$s=u=\dfrac{1}{2(1+\cos\theta)}$，$t=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$ //

(4) $|\overrightarrow{OH}|^2=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2+2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2su\,\vec{c}\cdot\vec{a}+2tu\,\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=s^2+t^2+u^2+st+tu+2su\cos\theta$

$=\dfrac{2\cos^2\theta+3\cos\theta+1}{2(1+\cos\theta)^2}$ ← (分子) $=(2\cos\theta+1)(\cos\theta+1)$

$=\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$

∴ $0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ より $1+2\cos\theta>0$，$1+\cos\theta>0$ なので

$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}}$ //

(5) $V=\triangle ABC\times OH\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cdot\sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}}\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}\cdot\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{4}\cdot\dfrac{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$

$=\dfrac{1}{6}\sqrt{(1+2\cos\theta)\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

$=\dfrac{1}{6}\sqrt{-\cos^2\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{6}\sqrt{-\left(\cos\theta-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{16}}$

∴ $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき

最大値 $\dfrac{1}{8}$ //