富山大学

2012年 工学部・理学部（その他）第3問

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$e^x \geqq 1 + x$$

(2) すべての実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2}$$

(3) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{e-1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \frac{\pi}{4}$$

(1) $f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと，

$f'(x) = e^x - 1$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$

増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，すべての実数 x に対して，$f(x) \geqq 0$ すなわち，$e^x \geqq 1+x$ が成り立つ ▨

(2) (1)より，すべての実数 t に対して，$e^t \geqq 1+t$ が成り立つ

ここで，$t = x^2$ を代入すると，

$e^{x^2} \geqq 1 + x^2$

両辺を $e^{x^2}(1+x^2)$ (>0) で割って

$e^{-x^2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ が得られる ▨

(3) (2)より，

$x = \tan\theta$ として置換積分

$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$，
$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

また，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$x \geqq x^2$ より，$e^{-x} \leqq e^{-x^2}$

$$\therefore \int_0^1 e^{-x^2}dx > \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

以上より，$\dfrac{e-1}{e} < \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \dfrac{\pi}{4}$ ▨