0001271818278999

豊橋技術科学大学

2012年 工学部 第1問　★行列なのは見た目だけで行列計算はほとんどありません

数理 石井K

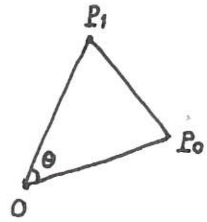
$\boxed{1}$ 座標平面上の点を，原点のまわりに角 θ だけ回転移動させる一次変換を表す2行2列の行列を A とする．以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の点 $P_0(a,\ b)$ が A によって変換された点を点 P_1 とする．2点 P_0，P_1 の間の長さを求めよ．

(2) $A^n = E$ となる条件を示せ．ただし，n は2以上の整数，$0 \leqq \theta \leqq \pi$，E は単位行列とする．

(3) 座標平面上の点 $P_0(a,\ b)$ が A によって l 回変換された点を点 P_l とする．点 P_0 が A によって n 回変換されると，原点の周りを1周して元の点 P_0 に戻るとする．n 個の点 P_0，P_1，$\cdots$，P_{n-1} で囲まれた n 角形の面積 S_n を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いて，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ．

(4) 座標平面上の点を，原点からの方向を変えずに距離を k 倍する一次変換を表す2行2列の行列を B とする．座標平面上の点 Q_{i-1} が一次変換 AB によって点 Q_i に移るとする．点 Q_0 を $(c_0,\ d_0)$ とするとき，2点 Q_{i-1}，Q_i の間の長さ m_i を k，θ，c_0，d_0 を用いて表せ．



(1) 右の図において，余弦定理より（$OP_0 = OP_1 = l$ とおいた）

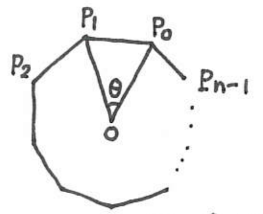
$$P_0P_1^{\,2} = l^2 + l^2 - 2l^2\cos\theta$$
$$= 4l^2 \cdot \frac{1-\cos\theta}{2}$$
$$= 4l^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$l = \sqrt{a^2+b^2}$ より．$\underline{P_0P_1 = 2\sqrt{a^2+b^2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$ //

$0 \leqq \theta < 2\pi$ と考えると，絶対値をはずしても良い
（問題で指定されていないので一応つけた）

(2) A^n は原点まわりに角 $n\theta$ だけ回転移動させるので．

$\underline{n\theta = 2m\pi \quad (m : 整数)}$ //



正n角形

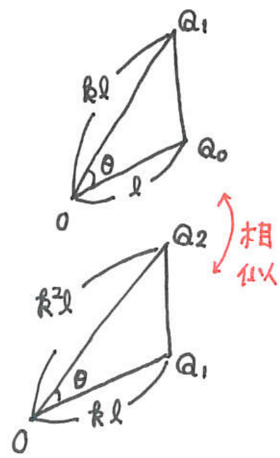
(3) P_0 を A で n 回変換すると，1周して P_0 に戻るので (2)より．$n\theta = 2\pi$

$$\therefore\ S_n = \underbrace{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\cdot\sin\theta}_{\triangle OP_0P_1 の面積}\cdot n$$

$$= \underline{\frac{1}{2}n(a^2+b^2)\sin\frac{2\pi}{n}} \ //$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\cdot\pi\cdot(a^2+b^2)$$

$$= \underline{\pi(a^2+b^2)} \ //$$



(4) $OQ_0 = l$ とおくと．右の図で余弦定理より．

$$Q_0Q_1^{\,2} = l^2 + k^2l^2 - 2kl^2\cos\theta$$

$\therefore\ l = \sqrt{c_0^2+d_0^2}$ より．$m_1 = \sqrt{c_0^2+d_0^2}\cdot\sqrt{1+k^2-2k\cos\theta}$

$\triangle OQ_{i-1}Q_i \backsim \triangle OQ_iQ_{i+1}$ で相似比は $1:k$ なので．

$$\underline{m_i = k^{i-1}\sqrt{c_0^2+d_0^2}\cdot\sqrt{1+k^2-2k\cos\theta}} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots) \ //$$