0001971548208999

北海道大学

2015年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ p は 0 でない実数とし

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $b_n = p^n a_n$ とする．b_{n+1} を b_n, n, p で表せ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(1) 与式の両辺に p^{n+1} をかけて

$$p^{n+1}a_{n+1} = p^n a_n - (-p)^{n+1}$$

$$\therefore \underline{b_{n+1} = b_n - (-p)^{n+1}}$$ //

(2) (1)より，$b_{n+1} - b_n = -(-p)^{n+1}$

階差数列の公式

$$\therefore b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} -(-p)^{k+1} \quad (n \geqq 2) \cdots (*)$$

(i) $p \neq -1$ のとき．$b_1 = p$ より

$$b_n = p - \frac{p^2\{1-(-p)^{n-1}\}}{1-(-p)} = \frac{p+p^2(-p)^{n-1}}{1+p} = \frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$\therefore a_n = \frac{b_n}{p^n} \text{ より，} \quad a_n = \frac{p+(-p)^{n+1}}{p^n(1+p)} = \frac{1-(-p)^n}{p^{n-1}(1+p)}$$

(ii) $p=-1$ のとき．

(*)より，$b_n = p - (n-1) = -n$

$$\therefore a_n = \frac{b_n}{p^n} = \frac{-n}{(-1)^n} = (-1)^{n+1}\cdot n$$

(i), (ii)より，

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1-(-p)^n}{p^{n-1}(1+p)} & (p \neq -1 \text{ のとき}) \\ (-1)^{n+1}\cdot n & (p=-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$ //