0001648181538999

筑波大学

2014年 第2問

$\boxed{2}$ xy 平面上の曲線 $C : y = x\sin x + \cos x - 1\ (0 < x < \pi)$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし $3 < \pi < \dfrac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい．

(1) 曲線 C と x 軸の交点はただ1つであることを示せ．

(2) 曲線 C と x 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ とする．$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ．

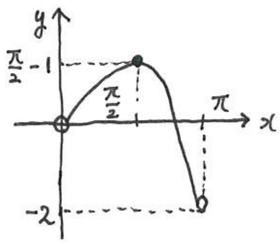
(3) 曲線 C，y 軸および直線 $y = \dfrac{\pi}{2} - 1$ で囲まれる部分の面積を S とする．また，xy 平面の原点O，点Aおよび曲線 C 上の点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ を頂点とする三角形OABの面積を T とする．$S < T$ であることを示せ．

(1) $f(x) = x\sin x + \cos x - 1$ とおくと，$f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

$\therefore$ $0 < x < \pi$ において $f'(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ 右のグラフより．C と x 軸の交点は1つ ∎

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	(-2)



(2) $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = \dfrac{2}{3}\pi \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1 = \dfrac{\sqrt{3}(2\pi - 3\sqrt{3})}{6} > 0$

$\therefore$ $\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ ∎

(3) $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - (x\sin x + \cos x - 1)\, dx$

$= \left[\dfrac{\pi}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\, dx$

$= \dfrac{\pi^2}{4} - 1 - \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x\, dx$

$= \dfrac{\pi^2}{4} - 1 + \left[-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{\pi^2}{4} - 2$

$T = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$

$= \dfrac{\pi}{4}\alpha - \dfrac{\alpha}{2}$

$\therefore$ $T - S = \dfrac{\pi}{4}\alpha - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi^2}{4} + 2$

$= \alpha \cdot \dfrac{\pi - 2}{4} - \dfrac{\pi^2}{4} + 2$

$> \dfrac{2\pi}{3} \cdot \dfrac{\pi - 2}{4} - \dfrac{\pi^2}{4} + 2$

$= \dfrac{-\pi^2 + 24 - 4\pi}{12}$

$> \dfrac{-10 + 24 - 13}{12}$

$= \dfrac{1}{12}$

> 0

$\therefore$ $T > S$ ∎