山形大学

2014年 第2問

$\boxed{2}$ xy 平面上の曲線 $C: y=\sqrt{x}$ がある．曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ $(t>0)$ における接線を ℓ とする．さらに，直線 ℓ と x 軸の交点を Q とする．次の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

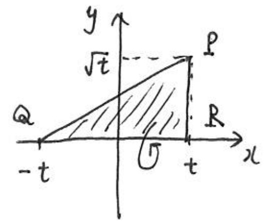
(2) 点 Q の座標を t を用いて表せ．

(3) 点 P から x 軸に下ろした垂線を PR とするとき，△PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を t を用いて表せ．

(4) 曲線 C，直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を t を用いて表せ．

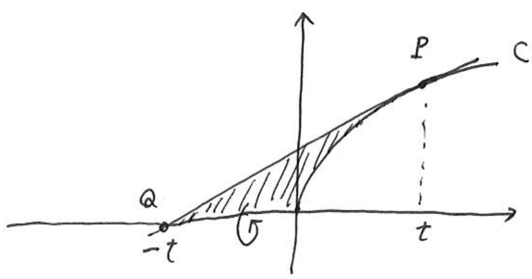
(1) $y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\therefore\ \ell: y = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)+\sqrt{t}$ $\therefore\ \underline{\ell: y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}}$ //

(2) $0 = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}$ $\therefore\ x = -t$ $\therefore\ \underline{\mathrm{Q}(-t,0)}$ //



(3) 右図の円すいになるので

$$V = \pi\cdot(\sqrt{t})^2\cdot 2t\cdot\frac{1}{3} = \underline{\frac{2\pi}{3}t^2}\ //$$



(4) $V = (\text{(3)の円すい}) - \pi\int_0^t (\sqrt{x})^2\,dx$

$= \frac{2\pi}{3}t^2 - \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t$

$= \frac{2}{3}\pi t^2 - \frac{\pi}{2}t^2$

$= \underline{\frac{\pi}{6}t^2}$ //