2017年 教育学部 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $y=3\cos 2\theta+4\sin 2\theta+6\sin\theta+12\cos\theta$ について，次の各問に答えよ．ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする．

(1) $x=\sin\theta+2\cos\theta$ として，y を x の関数で表せ．

(2) y の最大値と最小値を求めよ．

(1) $x^2=\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta$

$$=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+2\sin 2\theta+4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\cos 2\theta+2\sin 2\theta+\frac{5}{2}$$

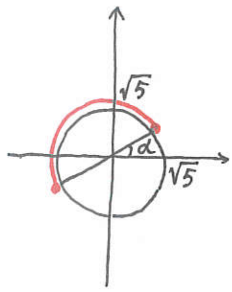
$\therefore\ 2x^2-5=3\cos 2\theta+4\sin 2\theta$

$\therefore\ y=2x^2-5+6x$

$\therefore\ \underline{y=2x^2+6x-5}$ //

(2) $x=\sin\theta+2\cos\theta$

$=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{ここで，}\alpha\text{は } \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$



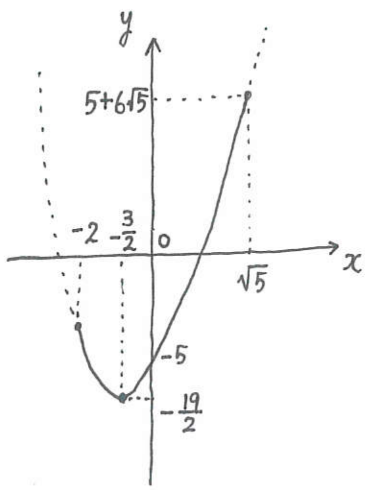
右図より

$\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\leqq x\leqq\sqrt{5}$ $\quad\therefore\ -2\leqq x\leqq\sqrt{5}$ $\cdots$ ①

(1)より，$y=2(x^2+3x)-5$

$$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{19}{2}$$

$x=-\frac{3}{2}$ は ① の範囲にありグラフは右のようになる．



$\therefore$ $\underline{\text{最大値 } 5+6\sqrt{5}\text{，最小値 } -\frac{19}{2}}$ //

$x=\sqrt{5}$ のとき　　$x=-\frac{3}{2}$ のとき