



2013 年 理学部 第 3 問

3 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ とし, $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とおく. また, 2 次の単位行列を E で表す. 以下の各問に答えよ.

(1) $A^3 = E$ を示せ.

(2) r を実数とする. 自然数 k に対して, 行列 $(rA)^{3k} + (rA)^{3k+1} + (rA)^{3k+2}$ の $(1, 1)$ 成分を a_k とおくと
き, a_k を r を用いて表せ.

(3) 自然数 N に対して $x_N = 2 \sum_{k=0}^N a_k$ とする. ただし a_k は, $k \geq 1$ のときは (2) で定めたものとし, $k = 0$ の
ときは $a_0 = 1 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r^2$ とおく. $-1 < r < 1$ のとき, $f(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N$ を求めよ.

(4) r が $-1 < r < 1$ の範囲を動くとき, (3) で定めた $f(r)$ のとりうる値の範囲を求めよ.