茨城大学

2013年 理学部 第3問

$\boxed{3}$ $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ とし，$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく．また，2次の単位行列を E で表す．以下の各問に答えよ．

(1) $A^3 = E$ を示せ．

(2) r を実数とする．自然数 k に対して，行列 $(rA)^{3k} + (rA)^{3k+1} + (rA)^{3k+2}$ の $(1,\ 1)$ 成分を a_k とおくとき，a_k を r を用いて表せ．

(3) 自然数 N に対して $x_N = 2\sum_{k=0}^{N} a_k$ とする．ただし a_k は，$k \geqq 1$ のときは (2) で定めたものとし，$k = 0$ のときは $a_0 = 1 - \dfrac{1}{2}r - \dfrac{1}{2}r^2$ とおく．$-1 < r < 1$ のとき，$f(r) = \lim_{N\to\infty} x_N$ を求めよ．

(4) r が $-1 < r < 1$ の範囲を動くとき，(3) で定めた $f(r)$ のとりうる値の範囲を求めよ．