茨城大学

2016年 工学部 第1問

1 以下の各問に答えよ．ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) 曲線 $C : y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について，傾きが1である接線を ℓ とする．C と ℓ との接点の座標を求めよ．

(2) 実数 α, β が $0 < \alpha < \beta < 1$ を満たすとき，2つの実数 $\dfrac{e^\alpha - \alpha}{\alpha}$ と $\dfrac{e^\beta - \beta}{\beta}$ の大小関係を不等号を用いて表せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{e-1} x \log(x+1)\,dx$ を求めよ．

(1) $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ より $y' = 1 \iff e^x - e^{-x} = 2$

$\iff (e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0$

$\iff e^x = 1 + \sqrt{2}$ ($\because e^x > 0$ より)

$\iff x = \log(1+\sqrt{2})$

$\therefore$ 接点は $\left(\log(1+\sqrt{2}),\ \dfrac{e^{\log(1+\sqrt{2})} + e^{-\log(1+\sqrt{2})}}{2}\right) = \underline{\left(\log(1+\sqrt{2}),\ \sqrt{2}\right)}$ //

(2) $f(x) = \dfrac{e^x - x}{x}$ $(0 < x < 1)$ とおくと．$f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

$\therefore$ $0 < x < 1$ において．$f'(x) < 0$ なので $f(x)$ は単調減少

$\therefore$ $0 < \alpha < \beta < 1$ のとき．$f(\alpha) > f(\beta)$ より $\underline{\dfrac{e^\alpha - \alpha}{\alpha} > \dfrac{e^\beta - \beta}{\beta}}$ //

(3) (与式) $\displaystyle = \int_0^{e-1} (x+1)\log(x+1) - \log(x+1)\,dx$

$\displaystyle = \int_0^{e-1} \left\{\frac{1}{2}(x+1)^2\right\}' \log(x+1)\,dx - \int_0^{e-1} (x+1)' \log(x+1)\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \log(x+1)\right]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{2}(x+1)\,dx - \Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^{e-1} + \int_0^{e-1} dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}(x+1)^2\right]_0^{e-1} - e + e - 1$

$= \dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{1}{4}e^2 + \dfrac{1}{4} - 1$

$= \underline{\dfrac{1}{4}(e^2 - 3)}$ //