



2017年理学部第3問

3 n を自然数とし、対数は自然対数とする。 $x > 0$ の範囲で、2つの曲線 $C: y = x \log x$ と $C_n: y = k_n x^{n+1}$ を考える。 C と C_n は共有点 P_n をもち、かつ P_n における C と C_n の接線が一致するように定数 k_n を定める。 P_n の x 座標を a_n とする。以下の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = x \log x$ ($x > 0$) の増減、極値、および曲線 C の凹凸、変曲点を調べ、 C の概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ であることは証明せずに用いてよい。

(2) k_n および a_n を n を用いて表せ。

(3) 曲線 C と C_2 および、2直線 $x = a_1$, $x = a_2$ で囲まれた部分の面積 T を求めよ。

(4) 点 P_n における曲線 C_n の接線と x 軸との交点の x 座標を b_n とし、 C_n , 2直線 $x = a_n$, $x = b_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とする。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n$ を求めよ。ただし、 e を自然対数の底とし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ であることは証明せずに用いてよい。}$$