2015年 工学部 第1問

$\boxed{1}$ 以下の各問に答えよ．ただし，対数は自然対数であり，eは自然対数の底である．

(1) 関数 $f(x) = x^2\sqrt{1+\log x}$ の $x = e^3$ における微分係数 $f'(e^3)$ を求めよ．

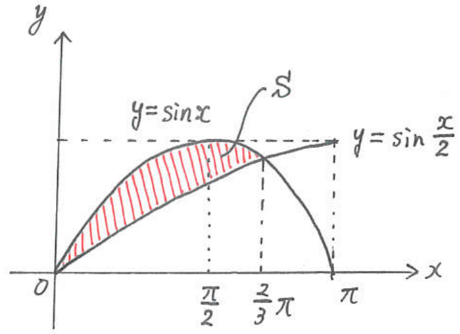
(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，2つの曲線 $y = \sin x$ と $y = \sin\dfrac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x t^2 2^{t^2}\,dt$ を求めよ．

(1) $f'(x) = 2x\cdot\sqrt{1+\log x} + x^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\log x}}\cdot\dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{x(5+4\log x)}{2\sqrt{1+\log x}}$

$\therefore f'(e^3) = \dfrac{e^3(5+12)}{2\sqrt{1+3}} = \underline{\dfrac{17}{4}e^3}$ //



(2) 2つの曲線の交点のx座標を求めると

$\sin x - \sin\dfrac{x}{2} = 0 \iff \sin\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2} - 1\right) = 0$

$\iff \sin\dfrac{x}{2} = 0$ または $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\iff x = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi$

右上図より

$S = \displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin x - \sin\frac{x}{2}\,dx$

$= \left[-\cos x + 2\cos\dfrac{x}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$

$= \dfrac{1}{2} + 1 + 1 - 2$

$= \underline{\dfrac{1}{2}}$ //

(3) $F(x)$ を $F'(x) = t^2\cdot 2^{t^2}$ となる関数の1つとする．

(与式) $= \displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^3-8}\Big[F(t)\Big]_2^x$

$= \displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$= \displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}$

$= F'(2)\cdot\dfrac{1}{4+4+4}$

$= 4\cdot 2^4\cdot\dfrac{1}{12}$

$= \underline{\dfrac{16}{3}}$ //