0002310909867999

茨城大学

2016年 教育学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ a，bを実数として，座標空間内に4点A(3, 1, 3)，B(2, 3, 2)，C(3, 3, 1)，D(2, a, b)がある．ただし，BとDは異なる2点とする．3点A，B，Cを通る平面をTとし，T上にあって3点A，B，Cを通る円をUとする．次の各問に答えよ．

(1) 点Dが平面T上にあるとき，aとbの条件を求めて，ab平面上に図示せよ．

(2) 点Dが円Uの周上にあるとき，点Dの座標を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,a-1,b-3)$

点Dが平面T上にあるとき

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と表せる（s,tは実数）

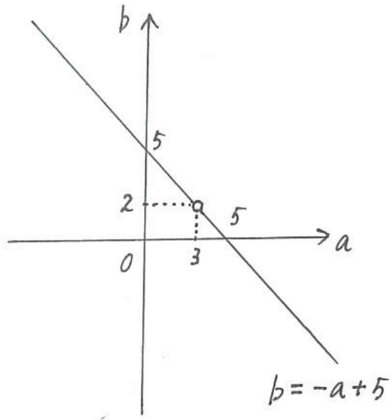
∴ 各成分を比較して

$$\begin{cases} -s=-1 \\ 2s+2t=a-1 \\ -s-2t=b-3 \end{cases} \iff \begin{cases} s=1 \\ a=2t+3 & \cdots ① \\ b=-2t+2 & \cdots ② \end{cases}$$

B≠Dより

①，②より tを消去して $\underline{b=-a+5 \text{ ただし，} (a,b)\neq(3,2)}$ //

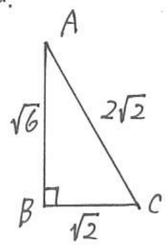
右の図の実線部分となる．ただし，(3,2)を除く



(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$ より $AB^2+BC^2=AC^2$

∴ △ABCは∠B=90°の直角三角形であるから，ACは円Uの直径である．

∴ 半径は$\sqrt{2}$



また，$\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{CD}\neq\vec{0}$より，点Dが円Uの周上にあるとき

$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CD}$ かつ B≠D となればよいから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD} &= (-1,a-1,b-3)\cdot(-1,a-3,b-1) \\ &= 1+(a-1)(a-3)+(b-3)(b-1) \\ &= 1+(a-1)(a-3)+(-a+2)(-a+4) \quad (\because (1)\text{より}) \\ &= 2(a^2-5a+6) \end{aligned}$$

∴ $a^2-5a+6=0$ より $(a-2)(a-3)=0$

∴ $(a,b)=(2,3),(3,2)$　B≠Dより $\underline{D(2,2,3)}$ //