2017年 理学部 第3問

$\boxed{3}$ nを自然数とし，対数は自然対数とする．$x > 0$の範囲で，2つの曲線$C : y = x \log x$と$C_n : y = k_n x^{n+1}$を考える．CとC_nは共有点P_nをもち，かつP_nにおけるCとC_nの接線が一致するように定数k_nを定める．P_nのx座標をa_nとする．以下の各問に答えよ．

(1) 関数$y = x \log x$ $(x > 0)$の増減，極値，および曲線Cの凹凸，変曲点を調べ，Cの概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$であることは証明せずに用いてよい．

(2) k_nおよびa_nをnを用いて表せ．

(3) 曲線CとC_2および，2直線$x = a_1$，$x = a_2$で囲まれた部分の面積Tを求めよ．

(4) 点P_nにおける曲線C_nの接線とx軸との交点のx座標をb_nとし，C_n，2直線$x = a_n$，$x = b_n$およびx軸で囲まれた部分の面積をS_nとする．極限値$\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^2 S_n$を求めよ．ただし，$e$を自然対数の底とし，$\displaystyle\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$であることは証明せずに用いてよい．