香川大学

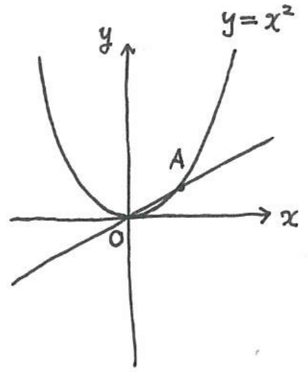
2013年 工学部 第1問

$\boxed{1}$ 次の問に答えよ．

(1) 座標平面上の原点 O を通り，x 軸とのなす角が $30°$ で傾きが正の直線と，放物線 $y = x^2$ の交点で O と異なるものを A とおく．点 A の座標を求めよ．

(2) 線分 OA を 1 辺とする正方形 OABC をつくる．ただし，点 C は第 2 象限にとる．点 B，C の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 直線 OB に垂直で，放物線 $y = x^2$ に接する直線の方程式を求めよ．



(1) 直線の方程式は，$y = \tan 30° \cdot x$ すなわち，$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

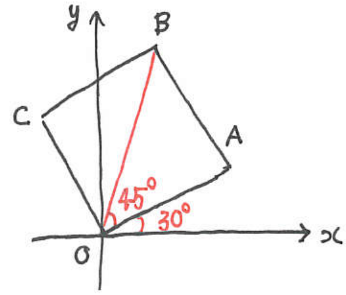
∴ 放物線との交点を求めると，$x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x = 0$

∴ $x\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$ A≠O より，$\underline{A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)}$ //

(2) $OA = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$，

直線 OB と x 軸の正の向きのなす角は，$45° + 30° = 75°$ より，

$B\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}\cos 75°, \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\sin 75°\right)$



ここで，$\cos 75° = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\sin 75° = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

∴ $\underline{B\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)}$ // また，線分 OB と AC の中点は一致するので，$\underline{C\left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$ //

(3) (2) より 直線 OB の傾きは，$\dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} = 2 + \sqrt{3}$

∴ 求める直線の傾きは，$-\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$

∴ $y = (\sqrt{3} - 2)x + a$ とおける．$y = x^2$ に代入して，

$x^2 - (\sqrt{3} - 2)x - a = 0$ これが重解をもつことより，判別式を D とおくと，

$D = (\sqrt{3} - 2)^2 + 4a = 0$ ∴ $a = \sqrt{3} - \frac{7}{4}$

∴ $\underline{y = (\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3} - \frac{7}{4}}$ //