2011年 コンピュータ理工 第1問

1 (1), (2) の問いに答えよ．また，(3) から (5) までの空欄をうめよ．

(1) 次の積分を求めよ．ただし，積分定数は省略してもよい．

(i) $\int x\sin x^2\,dx = \boxed{\text{イ}}$ $-\frac{1}{2}\cos x^2$

(ii) $\int_0^2 xe^x\,dx = \boxed{\text{ロ}}$ e^2+1

(2) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}} = \boxed{\text{ハ}} \quad \frac{1}{4}$$

(3) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $3\sin x + \cos 2x + 1 = 0$ のとき，$x = \boxed{\text{ニ}}$ $-\frac{\pi}{6}$ である．

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$(A+B)(A-B) = \boxed{\text{ホ}}$ である． $\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -48 & 0 \end{pmatrix}$

(5) O を原点とする座標空間に 2 点 A(1, 2, 1), B(2, 2, 0) をとる．このとき，$\cos\angle\text{AOB} = \boxed{\text{ヘ}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\triangle$AOB の面積は $\boxed{\text{ト}}$ $\sqrt{3}$ である．

(1) (i) $(\cos x^2)' = -2x\sin x^2$

$\therefore \int x\sin x^2\,dx = \underline{-\frac{1}{2}\cos x^2}$ //

(ii) $\int_0^2 x(e^x)'\,dx = \left[xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx$

$= 2e^2 - \left[e^x\right]_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1$

$= \underline{e^2+1}$ //

分子・分母を 4^n でわった

(2) (与式) $= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+4} = \underline{\frac{1}{4}}$ //

(3) $3\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 1 = 0$

$\therefore 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

$\sin x - 2 < 0$ より，$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$\underline{x = -\frac{\pi}{6}}$ //

(4) $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$，$A-B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -48 & 0 \end{pmatrix}}$ //

(5) $\cos\angle\text{AOB} = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}||\vec{OB}|}$

$= \frac{2+4+0}{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}}$

$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ //

$\cos\angle\text{AOB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\sin\angle\text{AOB} = \frac{1}{2}$ ← 次で使う

$\triangle\text{AOB} = \frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OB}|\cdot\sin\angle\text{AOB}$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\sqrt{3}}$ //