横浜国立大学

2016年 理工 第4問

$\boxed{4}$ aを正の定数とする．2つの曲線 $C_1 : y = x\log x$ と $C_2 : y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい．

C_1 の接点を $(s, s\log s)$ $(s>0)$ とおくと，

$y' = \log x + 1$ より，接線は．

$y = (\log s + 1)(x - s) + s\log s$

$\therefore\ y = (\log s + 1)x - s \quad \cdots①$

C_2 の接点を (t, at^2) とおくと

$y' = 2ax$ より，接線は．

$y = 2at(x - t) + at^2$

$\therefore\ y = 2atx - at^2 \quad \cdots②$

①，② は同一の直線を表すから．

$$\begin{cases} \log s + 1 = 2at & \cdots③ \\ s = at^2 & \cdots④ \end{cases}$$

③ より．$t = \dfrac{\log s + 1}{2a}$

これを④に代入して整理すると，$\dfrac{(\log s + 1)^2}{4s} = a$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{(\log x + 1)^2}{4x}$ とおくと

$y = f(x)$ と $y = a$ のグラフの交点の個数を調べればよい

$$f'(x) = \frac{2(\log x + 1)\cdot\frac{1}{x}\cdot 4x - (\log x + 1)^2\cdot 4}{16x^2}$$

$$= \frac{(\log x + 1)(1 - \log x)}{4x^2}$$

よって，$f'(x) = 0$ となるのは．$x = \dfrac{1}{e}$，e

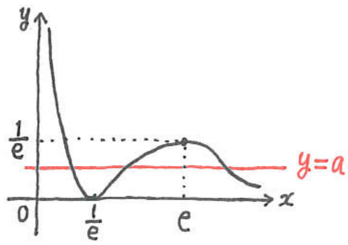
x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

（つづき）

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ より，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x} = 0$ を使った

グラフは下のようになる．



$$\therefore \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{e} \text{ のとき } 3\text{本} \\ a = \frac{1}{e} \text{ のとき } 2\text{本} \\ a > \frac{1}{e} \text{ のとき } 1\text{本} \end{cases}$$