



2011年理系第2問

2 a, b を実数の定数とし, 3つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

は $AR = QA$ を満たしている. 次の をうめよ.

$AR = QA$ を満たす a の値は 2 つある. そのうち, A が逆行列をもたないのは, $a = \text{①}$ のときであり, このとき, $b = \text{②}$ である. A が逆行列 A^{-1} をもつのは, $a = \text{③}$ のときであり, このとき, $A^{-1} = \text{④}$, $b = \text{⑤}$ である.

n を 2 以上の自然数として,

$$S_n = A + AR + AR^2 + \cdots + AR^{n-1}$$

とおく. $AR = QA$ であるから, S_n は実数 x_n, y_n を用いて

$$S_n = \begin{pmatrix} x_n & 0 \\ 0 & y_n \end{pmatrix} A$$

と表される.

$a = \text{③}$ のときは, $x_n = \text{⑥}$, $y_n = \text{⑦}$ である. したがって, E を単位行列として,

$$E + R + R^2 + \cdots + R^{n-1} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$

とおくと, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \text{⑧}$ である.