

2014年 家政学部 第1問

1 四面体 ABCD において、 $AB = 2$ ,  $AC = BC = 3$ ,  $AD = BD = 4$ ,  $CD = 5$  であるとする。M を辺 AB の中点とし、 $\angle CMD = \theta$  とおく。

- (1)  $\cos \theta$  の値を求めよ。  
 (2) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

$$(1) CM^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \quad \therefore CM = 2\sqrt{2}$$

$$DM^2 = 4^2 - 1^2 = 15 \quad \therefore DM = \sqrt{15}$$

$\therefore$  余弦定理より。

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{8 + 15 - 25}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{30}} \\ &= -\frac{\sqrt{30}}{60} \end{aligned}$$

$$(2) (1) \text{より}, \sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{30}}{60}\right)^2} = \sqrt{\frac{3570}{60^2}} = \frac{\sqrt{119}}{2\sqrt{30}}$$

$$\therefore \Delta CMD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{119}}{2\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{119}}{2}$$

四面体 ABCD の体積は図形の対称性より。

四面体 AMCD の体積の 2 倍であり。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{119}}{2} \times 1 \times 2 \\ &= \frac{\sqrt{119}}{3} \end{aligned}$$

