島根大学

2011年 総合理工（数理・情報システム以外）第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ p，q を定数とし，p は0でないとする．2つの放物線 $y=4x^2+3px+5q$ と $y=3x^2+2px+4q$ が，異なる2点M，Nで交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線MNの傾きを p を用いて表せ．

(2) OM＝ONとなるとき，q を p の式で表せ．ただし，Oは座標平面の原点を表す．

(1) $4x^2+3px+5q-(3x^2+2px+4q)=0$

$\therefore\ x^2+px+q=0$

交点のx座標を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと．解と係数の関係より．

$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

また，交点は $(\alpha,\ 4\alpha^2+3p\alpha+5q)$．$(\beta,\ 4\beta^2+3p\beta+5q)$ と表せるので

$$(\text{直線MNの傾き})=\frac{4\alpha^2+3p\alpha+5q-(4\beta^2+3p\beta+5q)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)(4\alpha+4\beta+3p)}{\alpha-\beta}$$

$$=4(\alpha+\beta)+3p$$

$$=\underline{-p}$$

(2) 線分MNの中点をHとおくと(1)より．

$$H\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{4\alpha^2+3p\alpha+5q+4\beta^2+3p\beta+5q}{2}\right)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{4(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta+3p(\alpha+\beta)+10q}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{p}{2},\ \frac{p^2}{2}+q\right)$$

OM＝ONのとき．△OMNはOを頂角とする二等辺三角形で．OH⊥MN

$\therefore$ (1)より．$\dfrac{\frac{p^2}{2}+q}{-\frac{p}{2}}\cdot(-p)=-1$

よって，$\underline{q=-\frac{p^2}{2}-\frac{1}{2}}$