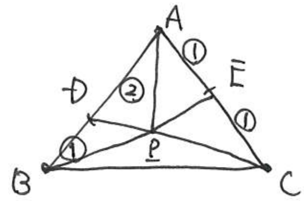
2014年 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

(1) $0 < \theta < \pi$ のとき, 不等式 $\cos 3\theta + 4\cos^2\theta < 0$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

(2) 三角形 ABC において, 辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D, 辺 AC の中点を E とする. 2 直線 BE と CD の交点を P とするとき, ベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ.

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+4+6+\cdots+2n}$ の和を求めよ.



補足説明

設問中の式の意味は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} + \frac{1}{2+4+6+8} + \cdots$$

である.

(1) $4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 4\cos^2\theta < 0 \iff \cos\theta(4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3) < 0$

$\iff \cos\theta(2\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 3) < 0$

$2\cos\theta + 3 > 0$ より. $\begin{cases} \cos\theta > 0 \text{, かつ, } \cos\theta < \frac{1}{2} \\ \cos\theta < 0 \text{ かつ } \cos\theta > \frac{1}{2} \end{cases}$ または.

同時には成り立たない!

$\therefore \underline{\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}}$ //

(2) メネラウスの定理より. $\frac{1}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{DP}{PC} = 1 \quad \therefore DP : PC = 1 : 3$

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \qquad \therefore \underline{\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$ //

(3) $2+4+6+\cdots+2n = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+4+6+\cdots+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \underline{1}$$ //