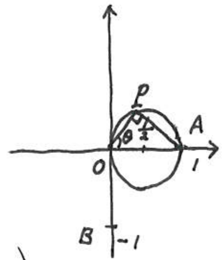
0001812097818999

金沢工業大学

2014年 理系1第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 原点をOとする座標平面上に点A(1, 0), B(0, −1)をとる．点$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円$C$を考える．$C$上の点で，第1象限にある点をPとし，$\angle \mathrm{POA} = \theta$とする．



(1) $\angle \mathrm{OPA} = \dfrac{\pi}{\boxed{ケ}}$ 2 であり，$\triangle \mathrm{POA} = \dfrac{1}{\boxed{コ}}$ 2 $\sin\theta\cos\theta$である．

(2) 四辺形OBAPの面積は$\dfrac{1}{\boxed{サ}}$ 2 $+ \dfrac{1}{\boxed{シ}}$ 4 $\sin 2\theta$である．

(3) $\triangle \mathrm{POB} = \dfrac{1}{\boxed{ス}}$ 4 $+ \dfrac{1}{\boxed{セ}}$ 4 $\cos 2\theta$である．

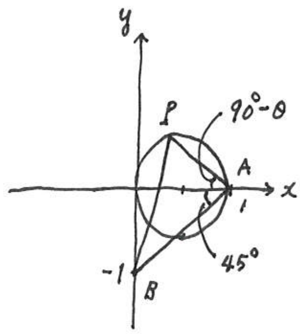
(4) $\triangle \mathrm{PBA}$の面積をSとすると，$S = \dfrac{1}{\boxed{ソ}}$ 4 $+ \dfrac{\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$ 2, 4 $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{\boxed{ツ}}\right)$ 4 であり，Sは$\theta = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\pi$ 3, 8 で最大値$\dfrac{1+\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニ}}$ 2, 4 をとる．

(1) OAは円Cの直径なので，$\angle OPA = \frac{\pi}{2}$

また，$\triangle POA = \frac{1}{2}\cdot OP\cdot OA\cdot \sin\theta = \frac{1}{2}\cdot\cos\theta\cdot 1\cdot\sin\theta = \underline{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}$ //

(2) (1)より．$OBAP = \underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta}$ //

(3) $\triangle POB = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\cos^2\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} = \underline{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta}$ //



(4) $PA = \sin\theta$，$AB = \sqrt{2}$ より．

$S = \frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(135^\circ - \theta)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$

$= \frac{1}{2}(\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta)$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$

$= \underline{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ //

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より．$-\frac{\pi}{4} < 2\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

$\therefore$ $\underline{S\text{は }\theta = \frac{3}{8}\pi\text{ のとき最大値 }\frac{1+\sqrt{2}}{4}\text{ をとる}}$ //