2018年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 0以上の整数 x, y に対して，$R(x,\ y)$ を次のように定義する．

$$\begin{cases} xy=0 \text{ のとき，} R(x,\ y)=0 \\ xy \neq 0 \text{ のとき，} x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x,\ y) \text{ とする．} \end{cases}$$

正の整数 a, b に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する．

$r_1=R(a,\ b)$, $\quad r_2=R(b,\ r_1)$,

$r_{n+1}=R(r_{n-1},\ r_n)\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

また，$r_n=0$ となる最小の n を N で表す．例えば $a=7$, $b=5$ のとき $N=3$ である．

次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する．

$f_1=f_2=1,\quad f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

このとき以下の各問いに答えよ．

(1) $a=f_{102}$, $b=f_{100}$ のとき，N を求めよ．

(2) 正の整数 a, b について，a が b で割り切れないとき，$r_1 \geqq f_N$ が成立することを示せ．

(3) 2以上の整数 n について，$10f_n < f_{n+5}$ が成立することを示せ．

(4) 正の整数 a, b について，a が b で割り切れないとき，

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{r_k} < \frac{259}{108}$$

が成立することを示せ．