2013 年 第 8 問

$\boxed{8}$ O を原点とする座標平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ が

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

で与えられている．

(1) 時刻 t における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_1}(t) = (x'(t),\ y'(t))$ は，ある 2×2 行列 A によって

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

と表すことができる．この行列 A を求めよ．

(2) P の各座標の時刻 t による n 次導関数を成分とするベクトルを $\overrightarrow{v_n}(t) = (x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t))$ とおく．このとき，$n \geqq 1$ に対し，

$$\begin{pmatrix} x^{(n)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

となることを，数学的帰納法を用いて示せ．

(3) $\overrightarrow{v_{2013}}(\pi)$ を求めよ．