2016年 第8問

8 関数

$$y = x^x(1-x)^{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) y の導関数を求めよ．

(2) y のとり得る値の範囲を求めよ．ただし，必要があれば，$\displaystyle\lim_{t \to +0} t^t = 1$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) $0<x<1$ のとき，$x^x>0$，$(1-x)^{1-x}>0$

∴ 両辺，対数をとり，

$\log y = \log x^x(1-x)^{1-x}$

∴ $\log y = x\log x + (1-x)\log(1-x)$

両辺 x で微分して，

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \log x + x\cdot\frac{1}{x} - \log(1-x) + (1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}$$

$$= \log x - \log(1-x)$$

$$= \log\frac{x}{1-x}$$

∴ $\underline{y' = x^x(1-x)^{1-x}\log\dfrac{x}{1-x}}$ //

(2) (1)より，$y'=0$ となるのは，$0<x<1$ において，$\dfrac{x}{1-x}=1$ すなわち $x=\dfrac{1}{2}$ のとき

$\displaystyle\lim_{t\to+0} t^t = 1$ より，$\displaystyle\lim_{x\to+0} y = 1$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0} y = \underset{t=1-x\text{ とおいた}}{\underline{\lim_{t\to+0} t^t(1-t)^{1-t}}} = 1$

よって増減表は下のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
y'		$-$	0	$+$	
y	(1)	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	(1)

∴ $\underline{\dfrac{1}{2} \leqq y < 1}$ //